

4.1 Математическое моделирование атмосферных процессов

В результате работы промышленных предприятий в окружающую среду выбрасываются газообразные и конденсированные продукты, например оксиды углерода, азота и серы, альдегиды, свинец и др. Кроме того, в приземном слое в процессе фотохимических реакций образуются озон и другие, опасные для здоровья человека и состояния растительного и животного мира токсиканты. При определенных метеорологических условиях даже незначительные транспортные потоки могут создавать неблагоприятную экологическую обстановку в населенных пунктах. Для проектирования и строительства промышленных предприятий необходимо проводить оценку загрязнения окружающей среды с учетом вышеуказанных факторов, а также рельефа местности, характера застройки и наличия лесных массивов. Необходимо также учитывать результирующее воздействие загрязнения окружающей среды от промышленных предприятий и иных источников, например промышленных предприятий. В результате анализа существующих моделей загрязнения окружающей среды от промышленных предприятий. Для моделирования таких процессов построена математическая модель. Эта модель приближена к реальности, которая учитывает направление и скорость ветра, температура окружающей среды и связанное с этим движение нагретых продуктов выбросов от промышленных предприятий.





Рис. 4.1 Разные примеры загрязнения атмосферы

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} =$$

- 1)
$$= -g \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} (k_1 \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_2 \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (k_3 \frac{\partial u}{\partial z})$$
- $$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} =$$
- 2)
$$= -g \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} (k_1 \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_2 \frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (k_3 \frac{\partial v}{\partial z})$$
- 3)
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$
- $$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} =$$
- 4)
$$= \frac{\partial}{\partial x} (k_1 \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_2 \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (k_3 \frac{\partial T}{\partial z})$$
- $$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} + w \frac{\partial S}{\partial z} =$$
- 5)
$$= \frac{\partial}{\partial x} (k_1 \frac{\partial S}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_2 \frac{\partial S}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (k_3 \frac{\partial S}{\partial z})$$
- 6)
$$\rho = \rho_0 (1 - \beta T + \alpha S)$$

Для этой системы уравнений ставим такие граничные условия:

Условия на стенках: $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$

Условие на поверхности земли: $k_3 \frac{\partial u}{\partial z} = -C|u|u$

$$k_3 \frac{\partial v}{\partial z} = -C|v|v$$

$$\text{Условие на высоте: } z = h, \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

$$\text{Кинематическое условие: } \frac{\partial H}{\partial t} = w$$

В этой системе первое уравнения описывает скорость ветра с востока на запад или запада на восток. Второе - описание скорости ветра с юга на север или севера на юг. Третье - это уравнения неразрывности. Четвертое уравнение необходимо для изменения температуры окружающей среды. Пятое - для концентрации (загрязняющее вещество), а шестое уравнение - изменения плотности.

Здесь u , v и w компоненты скорости, g - ускорение свободного падения, H - геострофическое давление, ρ_0 - начальная плотность окружающей среды, k_1, k_2, k_3 - коэффициенты диффузии, h - высота, β - коэффициент расширения и сжимаемости, α - коэффициент насыщенности, T - температура, S - концентрация.

Численный алгоритм для решения системы уравнений:

1) Уравнение (4) решаем с помощью методом дробных шагов, который был подробно описан в главах 3.1 и 3.7.

2) Решение уравнение (5) находится аналогично первому пункту, методом дробных шагов.

3) Найденную температуру (T) и концентрацию (S) подставляем в уравнение (6) и находим плотность ρ .

4) Далее найденную плотность (ρ) подставляем в уравнения (1) и (2) и снова применяем метод дробных шагов. Ввиду того, что количество неизвестных больше, чем количество уравнений, решение не очевидно. Поэтому необходимо применить метод расщепления по физическим параметрам. Для этого при решении (1) и (2) уравнений методом дробных шагов не учитываем давление (P). Давайте напишем алгоритм для первого уравнения. С помощью метода дробных шагов находим $u^{n+1/3}$ и $u^{n+2/3}$, а для третьего шага u^{n+1} добавляем давление (P), которое не было учтено до этого

$$\begin{aligned} A_i u^{n+1}_{i+1} + B_i u^{n+1}_i + C_i u^{n+1}_{i-1} = \\ = D_i - g \frac{\partial H}{\partial x} \quad i = 1, N-1 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Решение будем искать в } u^{n+1}_i = \alpha_i + \beta_i \frac{\partial H}{\partial x} \quad \text{виде.} \quad (2)$$

Теперь подставим (2) в (1) и получим

$$\begin{aligned} A_i (\alpha_{i+1} + \beta_{i+1} \frac{\partial H}{\partial x}) + B_i (\alpha_i + \beta_i \frac{\partial H}{\partial x}) + \\ + C_i (\alpha_{i-1} + \beta_{i-1} \frac{\partial H}{\partial x}) = D_i - g \frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned}$$

Последнее уравнения разделим на два уравнения

$$\begin{aligned} A_i \alpha_{i+1} + B_i \alpha_i + C_i \alpha_{i-1} = D_i \\ A_i \beta_{i+1} \frac{\partial H}{\partial x} + B_i \beta_i \frac{\partial H}{\partial x} + C_i \beta_{i-1} \frac{\partial H}{\partial x} = -g \frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned} \quad (3)$$

Второе уравнение, относящееся к (3) системе, можно сократить на $\frac{\partial H}{\partial x} \neq 0$, в результате получим

$$\begin{aligned} A_i \alpha_{i+1} + B_i \alpha_i + C_i \alpha_{i-1} &= D_i \\ A_i \beta_{i+1} + B_i \beta_i + C_i \beta_{i-1} &= -g \end{aligned}$$

Отсюда с помощью матричной прогонки можно найти α_i и β_i .
А для второго уравнения мы используем

$$v^{n+1}_i = \gamma_i + \sigma_i \frac{\partial H}{\partial y} \quad (4)$$

и проделываем такую же операцию как для u^{n+1}_i .

5) Теперь интегрируя (3) систему уравнений по z получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h v dz + w = 0$$

Используя кинематическое условие, можно будет переписать последнее уравнения в таком виде

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h v dz = 0 \quad (5)$$

Теперь подставим в (5) уравнения (2) и (4) и получим

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h (\alpha_i + \beta_i \frac{\partial H}{\partial x}) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h (\gamma_i + \sigma_i \frac{\partial H}{\partial y}) dz = 0$$

Так как коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \sigma_i$ не зависят от z , то можно будет записать последнее уравнения в таком виде

$$\frac{\partial H}{\partial t} + S_1 + S_2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + S_3 + S_4 \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0$$

Последнее уравнения решаем с помощью матричной прогонки

$$\begin{aligned} \frac{H^{n+1}_{ij} - H^n_{ij}}{\Delta t} + \frac{H^{n+1}_{i+1j} - 2H^{n+1}_{ij} + H^{n+1}_{i-1j}}{\Delta x^2} + \\ + \frac{H^{n+1}_{ij+1} - 2H^{n+1}_{ij} + H^{n+1}_{ij-1}}{\Delta y^2} = -S_{1ij} - S_{3ij} \end{aligned}$$

Приводим к векторному виду последнее уравнения и находим все коэффициенты

$$A_i H_{i+1} + B_i H_i + C_i H_{i-1} = D_i$$

$$A_i = \begin{vmatrix} \frac{S_2}{\Delta y^2} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \frac{S_2}{\Delta y^2} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dot{S}_2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\dot{S}_2}{\Delta y^2} \end{vmatrix} \quad C_i = \begin{vmatrix} \frac{S_2}{\Delta y^2} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \frac{S_2}{\Delta y^2} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dot{S}_2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\dot{S}_2}{\Delta y^2} \end{vmatrix}$$

$$B_i = \begin{vmatrix} \frac{1}{\Delta t} - \frac{2S_2}{\Delta x^2} - \frac{2S_4}{\Delta y^2} & \frac{S_4}{\Delta y^2} & \cdot & 0 \\ \frac{S_2}{\Delta y^2} & \frac{1}{\Delta t} - \frac{2S_2}{\Delta x^2} - \frac{2S_4}{\Delta y^2} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{S_4}{\Delta y^2} \\ 0 & 0 & \frac{S_2}{\Delta y^2} \cdot \frac{1}{\Delta t} - \frac{2S_2}{\Delta x^2} - \frac{2S_4}{\Delta y^2} & \cdot \end{vmatrix}$$

Далее решаем с помощью матричной прогонки